

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

$$P(B \setminus A) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$

$$A \cap C = A - A \cap C^c$$

$$A \cap C = (A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$$

$$\text{de Morgan: } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ereignissystem A: Ω endlich $\rightarrow A = \text{Pot}(\Omega)$

A ist σ -Algebra, falls gilt:

$$1. \Omega \in A \quad 2. A \in A \Rightarrow A^c \in A \quad \forall A \in A \quad 3. (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in A$$

Borel- σ -Algebra ist die von der Menge der halb-offenen Intervalle erzeugte σ -Algebra über \mathbb{R}

$B \neq \emptyset$, A σ -Algebra über Ω : $B \cap A := \{B \cap A \mid A \in A\}$ ist σ -Algebra über B und heißt **Spur- σ -Algebra**

Wahrscheinlichkeitsverteilung /-maß auf Ω :

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in A$$

$$P(\Omega) = 1$$

(Ω, A, P) ist Wahrscheinlichkeitsraum

(Ω, A) ist messbarer Raum

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{für disjunkte } A_i$$

Zähldichte: Summe aller Elementarereignisse ist 1

$$\text{Zähldichte } h \text{ ist Faltung der Dichte von } X_1, X_2: \quad h(k) = \sum_{j \in J} f(j) * g(k-j)$$



Einpunktverteilung, Dirac-Verteilung: $\Omega \neq \emptyset$, $a \in \Omega$, $P(A) = 1$, wenn $a \in A$, sonst $P(A) = 0$

Träger: größter W-wert für ein Elementarereignis, $\text{supp}(P) = \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) > 0\}$

Bernoulli-Experiment: $\Omega = \{0,1\}$, $A = \text{Pot}(\Omega)$, $P: P(\{1\}) = p$, $P(\{0\}) = 1-p$

Laplace-Verteilung: $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $A = \text{Pot}(\Omega)$, $P: P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\}) = \frac{1}{N}$
 $P(A) = \frac{|(A)|}{|(\Omega)|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$

Maß

ziehen mit zurücklegen in Reihenfolge: n^k

ziehen ohne zurücklegen in Reihenfolge: $\frac{(n)!}{(n-k)!}$

ziehen ohne zurücklegen ohne Reihenfolge: $\binom{n}{k}$

Beispiele

ziehen mit zurücklegen ohne Reihenfolge: $\binom{n+k-1}{k}$

mit Reihenfolge: **Permutation**

ohne Reihenfolge: **Kombination**

hypergeometrische Verteilung:

$h(\text{gew. Anz. Stichprobe, Umfang Stichprobe, Umfang Raum, Anz. Gew. Objekte im Raum}) =$

$$h(s; k, n, S) = \frac{\binom{S}{s} * \binom{n-S}{k-s}}{\binom{n}{k}} \quad \text{z.B. Skat, genau 1 Ass}$$

$\sum_{i=1}^k h(i)$ ist die hypergeometrische Verteilungsfunktion $H(s; k, n, S)$

Max.-Likelihood-Verfahren: S sind markiert, von k gefangenen sind s markiert $\Rightarrow n = \frac{S * k}{s}$

Binominal oder Bernoulli-Verteilung: $b(n, p) = B(n, k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$ k aus n

aussuchen, die k haben p , die anderen $(1-p)$ z.B. Von n Paketen dürfen max / genau k

kaputt sein (bei max: $\sum_{i=0}^k B(n, i)$)

Poisson-Verteilung: für gr. n , kl. p , $\lambda = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\text{Zeitr. f. Anz. der ges. Ereign.}}{\text{Ø - Zeitraum für ein Ereign.}}$ $p(s) = \frac{\lambda^s}{(s)!} * e^{-\lambda}$

Wahrscheinlichkeit, dass genau s Ereignisse stattfinden

geometrische Verteilung: $\text{geom}(p) = p * (1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$

Kapitel 3

Siebformel v. Sylvester-Pointcarre:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A \cap B) = P(B) * P(A|B)$

Regeln: $P(A|B) := \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$, $P(\bigcap_{i=1}^n a_i) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots$

totale Wahrscheinlichkeit: Sind alle $P(B_i)$, $P(A|B_i)$, bekannt B_i paarweise disjunkt, so gilt:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) * P(A|B_i)$$

Bayes'sche Formel: B_i abzählbare Zerlegung von Ω (disjunkt), $i \in I$, $P(B_i)$ und $P(A|B_i)$ bekannt,

dann gilt: $P(B_k|A) = \frac{P(B_k) * P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i) * P(A|B_i)}$ „Wenn A auftritt, wie hoch ist die W-keit für B_k “

stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) * P(B) \Rightarrow$ für $P(A) > 0$: $P(B|A) = P(B)$, B analog
paarweise stochastisch unabhängig, wenn $P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) * \dots * P(A_{i_k})$

A, B s.u. $\Rightarrow A, B^c$ und A^c, B^c sind s.u.

$P(B) > 0$ und A, B s.u. $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$

$(A_n)_n$ heißt **konvergent**, wenn $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$

allg. stochastisch unabhängig: $P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j) \forall \emptyset \neq J \subset I, |J| < \infty$

S 28-31

Messraum: Paar (Ω, \mathcal{A}) , $\Omega \neq \emptyset$, \mathcal{A} ist σ -Algebra über Ω

ZV messbar: $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ sind Messräume, $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ mit $X^{-1}(A') = \{X \in A'\} \in \mathcal{A} \forall A' \in \mathcal{A}'$

Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \in I} p_i$

Erwartungswert: diskret: $EX := \sum_{k \in \Omega'} k * P(X=k)$ stetig: $E(X) := \int_a^b X * f^X(X) dx$

Varianz / Streuung: $Var X := EX^2 - (EX)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$

Kovarianz: $Cov(X,Y) := E(X*Y) - EX * EY$

m-tes Moment: $E(X^m)$

$Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X \neq EX) = 0$

$E(X \diamond Y) = E(X) \diamond E(Y) \quad \diamond \in \{*, +\}$

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 * \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n Cov(X_i, X_j) \leftarrow Cov(X,Y)=0, \text{ wenn } X,Y \text{ stoch. unabh.}$

Korrelationskoeffizient: $Kor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{Str X * Str Y}$

stochastisch konvergierend

schwaches Gesetz großer Zahlen: für beliebig kleines, positives ε : $X_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1$

f^X = Zähldichte, (marginale) Dichte, (R-)Zähldichte, (R-) Dichte (-Funktion), Dichtekurve

F^X = Verteilungsfunktion

P^X = Verteilung, Wahrscheinlichkeitsverteilung, verteilt nach Verteilungsfunktion

Verteilungsdichte = Dichte einer Verteilung

VERTEILUNG	DICHTE	EX	Var X
Einpunkt'	$e_{\{a\}}(k)$	a	0
Laplace'	$\frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli'	$b(p) = p^k \cdot (1-p)^{1-k}$	p	$p \cdot (1-p)$
Binomial'	$b(s; k, p) = \binom{k}{s} \cdot p^s \cdot (1-p)^{k-s}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
Hypergeom'	$h(s; k, n, S) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{n-S}{k-s}}{\binom{n}{k}}$	$k \cdot \frac{S}{n}$	$k \cdot \frac{S}{n} \cdot \frac{n-S}{n} \cdot \frac{n-k}{n-1}$
Poisson'	$p(s) = \frac{\lambda^s}{s!} \cdot e^{-\lambda}$	λ	λ
Geometrische'	$geom(p) = p \cdot (1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

VERTEILUNGEN	R-DICHTE:	VERTEILUNGSFUNKTION:
$\mathcal{R}_{[a,b]}$	$f^X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$F^X(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x > b \end{cases}$
Exp(λ)	$f^X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$	$F^X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$
Weib(α, β)	$f^X(x) = \begin{cases} \alpha \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha x^\beta} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$	$F^X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^\beta} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	$f^X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-x} \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$ $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} \cdot e^{-t} dt$	
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	
$\mathcal{N}(0, 1)$	$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$	