$\boldsymbol{\tau}\ (\boldsymbol{\psi})$: in ψ vorkommende Aussagenvariablen

Interpretation passend, wenn nur Variablen aus $\tau(\psi)$ belegt werden

$[|\psi(w_1,\ldots,w_n)|] = [|\psi(W)|] = [|\psi|]^{\Im}$

ψ und φ sind **logisch äquivalent**: $\psi \equiv \varphi$ gdw alle $\Im$ von ψ und φ gleich sind

Eine Formel ist **erfüllbar** gdw $\neg\psi$ keine Tautologie ist

KNF: $\wedge \vee x_{ij}$
DNF: $\vee \wedge x_{ij}$

Zu jeder Formel $\psi \in$ AL gibt es eine äquivalente DNF- und KNF-Formel

funktional vollständig: $\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{\rightarrow, 0\}, \{|\}$

Horn-Formel: in KNF, jede Disjunktion hat höchstens ein positives Literal (auch Implikation).
$X \Rightarrow 1 \rightarrow X$; $\neg X \Rightarrow X \rightarrow 0$

Markierungsalgorithmus: Fange mit leerer Menge an, nehme dann nach und nach alle X_i auf, die mit 1 interpretiert werden müssen. Ergebnis (falls vorhanden) ist kleinstes Modell

Hornformel im Gegensatz zu KNF, DNF keine Normalform

Es gibt aussagenlogische Formeln, die nicht zu Hornformeln äquivalent sind

Modell einer Formelmenge $\Phi \subseteq$ AL ist eine $\Im$, so dass $[|\varphi|]^{\Im} = 1$ f.a. $\varphi \in \Phi$

Φ ist erfüllbar gdw jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist

Zorn: Sei (A,<) eine nicht-leere partielle Ordnung in der jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann besitzt (A,<) ein maximales Element

König: T sei ein endlich verzweigter Baum mit beliebig langen Wegen, dann gibt es auch einen unendlich langen Weg

Kompaktheitssatz: Sei $\Phi \subseteq$ AL, $\psi \in$ AL, dann 1) Φ erfüllbar gdw jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar 2) $\Phi \models \psi$ gdw eine endl Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ex mit $\Phi_0 \models \psi$

Resolution: Formel in KNF → Klauselmengen, nur ein Literal resolvieren, $\square$ ableiten. Wenn $\square$ aus φ ableitbar, dann φ unerfüllbar (aus $\neg\varphi$ ableitbar, dann φ allgemeingültig). $\varphi \models \psi$ erfüllbar, wenn $\varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar. φ und ψ schließen sich aus, wenn $\varphi \wedge \psi$ unerfüllbar.

Hornformel ψ ist unerfüllbar, wenn $\square$ durch Einheitsresolution ableitbar

$\Im$ falsifiziert die Konklusion der Regel gdw $\Im$ eine Prämisse des Regel falsifiziert. Es folgt, dass die Konklusion gültig ist, gdw die Prämissen gültig sind.
Wenn keine Implikation ($\Rightarrow$) in einer Formel φ, dann $\varnothing \Rightarrow \varphi$

Sequenzenkalkül, SK: Antezedenz ⇒ Sukzedenz.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jedes Modell von Γ auch Modell von mind. einer Formel aus Δ ist. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist falsifizierbar, wenn Γ und Δ disjunkt sind

$$\frac{\textit{Prämissen}}{\textit{Konklusion}}$$

Am Ende jedes Blatt mit einem Axion beschriftet

1.7 SK$(\star)$ Wenn c in $\Gamma, \Delta, \psi(x)$ nicht vorkommt.

$(\neg \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$	$(\Rightarrow \neg)$	$\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$
$(\vee \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi\vartheta \Rightarrow \Delta}$	$(\Rightarrow \vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$
$(\wedge \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma\psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta}$	$(\Rightarrow \wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$
$(\rightarrow \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta}$	$(\Rightarrow \rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$
$(=)$	$\dfrac{\Gamma, t=t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$		
$(S \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t=t', \psi(t) \Rightarrow \Delta}$	$(\Rightarrow S)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t=t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$
$(\exists \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (\star)$	$(\Rightarrow \exists)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$
$(\forall \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$	$(\Rightarrow \forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ (\star)$

Zwei Mengen sind **gleichmächtig**, wenn zwischen ihnen eine Bijektion existiert

Abzählbar: surjektive Abb $\mathbb{N} \rightarrow A$. Jede abzählbare Menge ist endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$

Strukturen: Universum, Funktionen und Relationen

Namen (Symbole) für die Relationen / Funktionen einer Struktur bilden ihre Signatur

relational: nur Relationen in der Signatur
funktional oder algebraisch: nur Funktionen in der Signatur

Substruktur / Erweiterung: Signatur fest, Universum verändert
Redukt / Expansion: Signatur verändert, Universum fest

lineare / partielle Ordnung: {<}-Struktur, die
irreflexiv: für kein a gilt a < a
transitiv: a < b, b < c, dann auch a < c
und für lineare Ordnung auch vergleichbar ist: f.a. A gilt entweder a<b, a=b, b<a

Wohlordnung: lineare Ordnung ohne absteigende Ketten

Semantik = Bedeutung/Interpretation; Syntax = Formelaufbau

Homomorphismus: strukturerhaltende Abbildung
f.a. Relationen R: $(a_1,\dots,a_n) \in R^A \Rightarrow (\pi a_1,\dots, \pi a_n) \in R^B$
f.a. Funktionen f: $\pi f^A(a_1,\dots,a_n) = f^B(\pi a_1,\dots, \pi a_n)$

starker Homomorphismus: $\bar{a} \in R^A \Leftrightarrow \pi\, \bar{a} \in R^B$

Einbettung: starker infektiver Homomorphismus
Isomorphismus: starker bijektiver Homomorphismus
Automorphismus: Isomorphismus $\pi : A \rightarrow A$

Automorphismengruppe: Menge von Automorphismen und deren Verknüpfungen

Prädikatenlogik (FO): Aussagenlogik, erweitert um ∀, ∃ und um Relationen und Funktionen

Quantorenrang: qr($\neg\varphi$) = qr(φ); qr(φ o ψ) = qr(qr(ψ),qr(φ)); qr($\forall x\varphi$) = qr($\exists x\varphi$) = qr(φ)+1

Klasse der lin. Ordn.: $\Phi = \forall x \neg x<x, \forall x \forall y \forall z (x<y \wedge y<z \rightarrow x<z), \forall x \forall y (x<y \vee x=y \vee y<x)$
M ist dicht: $\varphi := \forall x \forall y (x<y \wedge Mx \wedge My \rightarrow \exists z (x<z \wedge z<y \wedge Mz))$
x ist Supremum von M: $\varphi(x) := \psi(x) \wedge \neg \exists z (\psi(z) \wedge z<x)$
z ist eine obere Schranke von M: $\varphi(z) := \forall y (My \wedge z \neq y \rightarrow y<z)$
x ist innerer Punkt von M: $\varphi(x) := \exists \epsilon (\epsilon>0) \wedge \forall y (x<y+\epsilon \wedge y<x+\epsilon \rightarrow My \wedge Mx)$
x,y teilerfremd: $\varphi(x,y) := \forall z (z|x \wedge z|y \rightarrow z=1)$
x Primzahl: $\varphi(x) := \forall z (z|x \rightarrow (z=x \vee z=1) \wedge z \neq 1)$
x,y haben gleiche Primfaktoren: $\varphi(x,y) := \forall p (p\,Primzahl \rightarrow (p|x \leftrightarrow p|y))$
x ist Primpotenz: $\varphi(x) := \exists p (p\,Primzahl \wedge \forall y (y|x \rightarrow (y=1 \vee p|y)))$
x ist Zweierpotenz: $\varphi(x) := \forall y (y\,Primzahl \wedge y|x \rightarrow y=2)$
die 7. Ziffer von x in Binärdarstellung ist 0: $\exists y \exists z (x=y+z \wedge y<128 \wedge 256|z)$
Definition der 0: $\varphi(x) := \forall y (y+x=y)$
Definition der 1: $\varphi(x) := \forall y (y*x=y)$
Definition < in $\mathbb{N}$: $\varphi(x) := \exists z (z\neq 0 \wedge x+z=y)$ = x<y
Definition injektiv: $\varphi := \forall x \forall y (x\neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$
Definition surjektiv: $\varphi := \forall x \exists y (f(y)=x)$
Definition -1: $\varphi(x) := \forall y (y+x*y=0)$
Ungerichteter Graph: $\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)$
Diskrete Menge: $\varphi := \forall x \exists y (x<y \wedge \neg \exists z (x<z \wedge z<y))$
Binärdarstellung von x und y ist gleichlang: $\varphi(x,y) := \forall z (z=2^n \rightarrow (z>x \leftrightarrow z>y))$
zw x, y ex ein Pfad der L. 3: $\varphi(x,y) := x=y \vee Exy \vee \exists z (Exz \wedge Ezy) \vee \exists z \exists a (Exz \wedge Eza \wedge Eay)$
$\mathbb{N} := \exists x \neg \exists y (y<x) \wedge \forall x \exists y (x<y \wedge \neg \exists z (x<z \wedge z<y))$
$\mathbb{Z} := \forall x \exists y (x<y \wedge neg \exists z (x<z \wedge z<y))$
$\mathbb{R} := \forall x \forall y (x<y \rightarrow \exists z (x<z \wedge z<y)) =: \mathbb{Q}$
$\mathbb{C} := \exists i (i*i+1=0)$

Nicht axiomatisierbar: 1) ungerichtete Graphen mit Eulerkreis 2) gerichtete Graphen mit Hamiltonpfad 3) Bäume: ungerichtete azyklische Graphen 4) azyklische, gerichtete Graphen
5) Klasse der ungerichteten, endlichen Graphen
Es ist nicht möglich, mit FO Aussagen über beliebig lange Pfade in einem Graphen zu machen

(FO-)Axiomatisierbar: Eine Strukturklasse K $\subseteq$ Str(τ) ist ax.-bar, wenn eine Satzmenge Φ aus FO ex, so dass K = Mod(Φ) gilt

freie / gebundene Variablen: frei, wenn nicht quantifiziert. Sonst gebunden

ψ folgt aus Φ, kurz $\Phi \models \psi$ gdw jede passende Interpretation, welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist

Substitution: nur freie Variablen ersetzen, umbenennen von gebundenen, wenn Kollisionen auftauchen

nacheinander substituieren ist nicht direkt gleich mit gleichzeitigem substituieren

Substitutionslemma: $[\![t[\rho]]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![t]\!]^{\mathfrak{I} \circ \rho}$, $\mathfrak{I} \models \psi[\rho] \Leftrightarrow (\mathfrak{I} \circ \rho) \models \psi$

Negationsnormalform: Formel ist in NNF, wenn nur aus Literalen und den Junktoren $\wedge$, $\vee$ und

Quantoren ∃ und ∀ aufgebaut ist: → entfernen, ¬ nach innen ziehen

Pränexnormalform: keine Vars kommen sowohl gebunden als auch frei vor, keine Vars mehr als einmal quantifiziert, Quantoren an den Anfang: bei NNF die quantifizierten Vars umbenennen und an den Anfang stellen

Skolemnormalform: aus PNF, indem man alle existenzquantifizierten Vars durch (# der ∀ vor dem ∃)-stellige Fkt ersetzt

Auswertungsspiel MC(A,ψ) in der FO: Verifiziererin zieht bei ∨ und bei ∃, Falsifizierer bei ∧ und bei ∀
φ und ψ äquivalent: Spiel mit $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

Modallogik (ML): $\langle a\rangle\varphi$=es ex eine a-Kante, danach gilt φ; $[a]\varphi$=für alle...; $\Diamond\varphi$=es ex eine Kante...; $\Box\varphi$ =für alle...

Modaltiefe: md($\neg\varphi$) = md(φ); md(φ o ψ) = max(md(ψ),md(φ)); md($\langle a\rangle\varphi$) = md($[a]\varphi$) = md(φ)+1

Endliche Spiele: Endposition ist ein Knoten, von dem keine Transitionen abgehen
Spiel ist **fundiert**, wenn es endlich ist
Spiel ist **determiniert**, wenn an jeder Position einer der beiden Spieler eine Strategie hat

$\mathrm{A} \models \psi$ gdw die Verifiziererin von der Startposition eine Gewinnstrategie hat

ML hat **Baummodell-Eigenschaft**, ML ist entscheidbar, FO nicht entscheidbar

CTL: E = es existiert, A = für alle, X = nächster, U = until, F = finally, G = globally

Bisimulatinsspiel in der ML: 2 Kripkestrukturen, SP1 in der 1. auf Pos u, SP2 in der 2. auf Pos u'. Beide ziehen nacheinander, kann SP1 nicht mehr ziehen oder SP2 nicht antworten verliert der jeweilige.
u,u' bisimilar, wenn SP2 eine Gewinnstrategie für das Spiel hat.

Bisimulationsinvarianz: Formel ψ in FO angeben oder beweisen, dass keine solche existiert:
2 Kripkestrukturen, die eine erfüllt ψ, die andere nicht, zwischen denen ein $\varphi \in$ ML nicht unterscheiden kann

Ehrenfeucht-Fraisse (EF): A,B τ Strukturen ⇒ folgendes äquivalent: 1) $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ 2) Die Duplikatorin gewinnt G(A,B) 3) für alle m $\in \mathbb{N}$ gewinnt D. $G_m(\mathrm{A},\mathrm{B})$
axiomatisierbar: versuchen, Strukturen $\mathrm{A} \in$ K und $\mathrm{B} \notin$ K zu finden, dann zeigen, dass die Duplikatorin $G_m(\mathrm{A},\mathrm{B})$ gewinnt, denn dann können A, B nicht durch FO-Sätze unterschieden (nicht end. ax) werden.

Löwenheim-Skolem: Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell
aufsteigender LöSko: Φ besitze unendliches Modell, dann gibt es zu jeder Menge M ein Modell $\mathrm{A} \models \Phi$ über Universum D, das mindestens so mächtig wie M ist

FO hat weder **EME** noch **BME**, ML hat **EME** und **BME**

Schlussregeln sind korrekt, Sequenzen sind gültig