

Anzahl der Relationen auf einer n-elementigen Menge: 2^{n^2}

Kern $\varphi \subseteq \text{Kern}(\psi, \varphi)$

Bild $(\varphi, \psi) \subseteq \text{Bild } \varphi$

Körper: +, • sind definiert

Assoziativität bzgl +, •

kommutativ bzgl +, •

neutrales El. bzgl +, •

Inverse bzgl +, •

Distributiv

Äquivalenzrelation: $R \subseteq M \times M$

R ist: reflexiv: (x, x)

symmetrisch: $(x, y) \Rightarrow (y, x)$

antisymmetrisch: (x, y) und $(y, x) \Rightarrow x=y$

transitiv: (x, y) und $(y, z) \Rightarrow (x, z)$

$(r), (s), (t)$ ist Äquivalenzrelation, $(r), (a), (t)$ ist (Halb-)Ordnung

Gruppe: • ist definiert

Assoziativität

neutrales Element

Inverses

ist G auch kommutativ, so ist G abelsch

(Gruppen-)Homomorphismus:

$\varphi: G \rightarrow H$

$\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$

Verkn. in G

Verkn. in H

isomorph: G, H sind isomorph, wenn $\varphi: G \rightarrow H$ Isomorphismus ist, $G \cong H$

Untergruppe: $U \leq G$ ist bzgl der Verknüpfung von G selbst eine Gruppe: $uv \in U \forall u, v \in U$

Für geg. $x \in M$ ist $C_x := \{y \in M \mid xRy\}$ eine **Äquivalenzklasse**

Ring: +, • sind definiert

$(R, +)$ ist abelsch

Assoziativität bzgl •

Distributiv

nicht zwingend kommutativ

Ring = Körper ohne Inverses bzgl •

R, S Ringe $\psi: R \rightarrow S$ ist ein **Ringhomomorphismus**, wenn ψ Gruppenhomomorphismus und

$\psi(x*y) = \psi(x) * \psi(y) \forall x, y \in R$ und $\psi(1)=1$

$x \in R$ ist **invertierbar (eine Einheit)**, wenn $x \cdot x' = 1$

R^* = Menge der Einheiten von R

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\Leftrightarrow n$ ist Primzahl, sonst ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Restklassenring

Matrizen:

$$(A^t)^t = A$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

K-Vektorraum:

abelsche Gruppe mit skalarer Multiplikation

$$(v1) (a+b)v = av + bv$$

$$(v2) a(v+v') = av + av'$$

$$(v3) a(bv) = ab(v)$$

$$(v4) 1v = v$$

W ist **K-Untervektorraum** von V , wenn W eine Gruppe ist und $aw \in W$

UVR-Kriterium:

$$W \neq \emptyset$$

$$w+w' \in W$$

$$aw \in W$$

$\langle M \rangle$ ist das **Erzeugnis** von M

φ ist **linear**: $\varphi: V \rightarrow W$

$$\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$$

$$\varphi(av) = a \varphi(v)$$

für $V=W$, φ linear ist φ ein Endomorphismus

$\varphi: V \rightarrow W$

$$\text{Kern } \varphi \leq V$$

$$\text{Bild } \varphi \leq W$$

φ injektiv: Kern $\varphi = \{0\}$

φ surjektiv: Bild $\varphi = W$

\emptyset ist l.u.

$0 \in M \Rightarrow M$ ist l.a.

(v_1, \dots, v_n) ist l.u., wenn sich der Nullvektor nur auf die triviale Weise erzeugen lässt

$$\dim K^n = n$$

$$\dim K^{m \times n} = m \cdot n$$

V endlich erzeugt:

- 1) V besitzt endliche Basis
- 2) M_1, M_2 Basen von V, dann M_1, M_2 endlich und $|M_1| = |M_2|$
- 3) $M' \subseteq V$ ist l.u. \Rightarrow Basis M von V ex. mit $M' \subseteq M$

Pot(M) hat $2^{|M|}$ Elemente

Zu jeder Menge M existiert genau eine Abbildung $\emptyset \rightarrow M$

Ist $M \neq \emptyset$ eine Menge, dann existiert keine Abbildung $M \rightarrow \emptyset$

$K^n = K^{n \times 1}$ = Menge der Spalten-n-Tupel über K

inhomogenes LGS: setze alle freien Variablen auf 0 und erhalte dadurch eine spezielle Lösung

R sei Äquivalenzrelation auf M, dann gilt: M/R ist Partition von M

$S_n := S_n$ heißt die symmetrische Gruppe auf n Ziffern, ein Element aus S_n heißt Permutation
 $|S_n| = n!$

Seien V und W endlich erzeugte K-VR, dann gilt: $V \cong W \Leftrightarrow \dim_K V = \dim_K W$

Anzahl der reflexiven Relationen auf einer n-elementigen Menge: $2^{n \cdot (n-1)}$

Anzahl der symmetrischen Relationen auf einer n-elementigen Menge: $2^{n \cdot (n+1)/2}$

Anzahl der reflexiven Relationen auf einer n-elementigen Menge: $2^{n \cdot (n-1)/2}$

Anzahl der Äquivalenzrelationen auf einer n-elementigen Menge:

$\dim(\text{Zeilen}) = \dim(\text{Spalten}) = \text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang} = \text{Rang}$

A invertierbar \Leftrightarrow homogenes LGS von A hat nur triviale Lsg $\Leftrightarrow Ax=b$ hat f.a. A genau 1 Lsg

$Ax=b$ lösbar, wenn $\text{rang}(A) = \text{rang}(A,b)$

invertieren: $(A|E_n) \rightarrow (E_n|A^{-1})$

$\dim_K(V) = \dim_K(\text{Kern } \varphi) + \dim_K(\text{Bild } \varphi)$

$M^A_C(\psi \circ \varphi) = M^B_C(\psi) M^A_C(\varphi)$

φ Isomorphismus gdw $M^B_C(\varphi)$ invertierbar

$M^B_B(\text{id } v) = M^B_B(\text{id } v)^{-1}$ heißt Basiswechselmatrix

$\varphi \in \text{Hom}(V,W): M^C_C(\text{id } w) M^B_C(\varphi) M^B_B(\text{id } v) = M^B_B(\varphi)$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

sgn einer Funktion : sgn(Fehlstandspaare)

$$\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$$

Cramersche Regel: $Ac=b: c_j = \frac{1}{\det(A)} * \det(A \text{ mit } b \text{ als } j\text{-te Spalte})$

K-VR V heißt K-Algebra, falls für $\forall x, y \in V$ gilt:

- $(V, +, \cdot)$ ist ein Ring

- $a(v \cdot v') = (av)v' = v(av')$ f.a. $A \in K, v, v' \in V$

Kern(φ) = l.u. Zeilen von $M_C^B(\varphi)$

Bild(φ) = l.u. Spalten von $M_C^B(\varphi)$

μ_A teilt alle Polynome f mit $f(A) = 0$

$$\det(A) = \det(A^t)$$

algebraische Vielfachheit: Exp der der Eigenwert-Terme
geometrische Vielfachheit: Dimension der Eigenvektoren
sind die beiden gleich, ist die Matrix diagonalisierbar