Komplexe Zahlen:

- Um bei einem Bruch den Nenner i-frei zu bekommen, einfach den Bruch komplex-konjugiert erweitern.
- Bei einer Wurzel sollte der Radiant auf die Form $(\alpha+\beta i)^2$ gebracht werden
- Bei der Nullstellenberechnung müssen Real- und Imagniärteil gleichzeitig 0 sein. Zuerst Nullstelle des einen berechnen, dann für jede Nullstelle die Nullstellen des anderen berechnen.
- Komplex-konjugiert: $v=a+bi, \bar{v}=a-bi$
- $|v|^2=v\cdot\bar{v}$

LR-Zerlegung:

- $l_i=\frac{a_i}{a_1}$ Wobei im n-ten Schritt die ersten n-1 Zeilen und Spalten nicht beachtet werden
- Vorwärtseinsetzen: Ly = b und Rückwärtseinsetzen: Rx = y
- $det(A)=sgn(\Pi)\cdot det(R)=sgn(\Pi)\cdot\prod r_{i,i}$
- Bei Pivotisierung: komplette Zeile tauschen, nachher gilt LRx = b' = Pb
- Voraussetzung für Zerlegung: A ist diagonaldominant, $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{i,j}|\leq|a_{i,i}|$ und $det(A)\neq 0$
- Bei einer Nullspalte (dh, das Pivotelemt ist 0) einfach den Schritt überspringen. Matrix ist singulär → Ly = b ist eindeutig, Rx = y ergibt einen Widerspruch oder Abhängigkeit
- $det(A)=0\ gdw.\ 0\ ist\ Eigenwert\ von\ A$
- Komplexität von $O(\frac{1}{3}n^3)$
- Bei s.p.d.-Matrizen und nichtsingulären,diagonaldominanten Matrizen keine Pivotisierung nötig

Normen:

Vektor:

- $||x||_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ist die Summe der Beträge der Elemente
- $||x||_\infty=\max_{i=1}^{n}|x_i|$ ist das betragsmäßig größte Element
- $||x||_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$

Matrix:

- $||A||_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$ ist das Maximum der Spaltensummen
- $||A||_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$ ist das Maximum der Zeilensummen
- $||A||_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$ Spektralnorm, für s.p.d. Matrizen: $||A||_2=\lambda_{max}(A)$
- $||A\cdot B||\leq||A||||B||$

Kondition einer Matrix: Maß für die Abhängigkeit von Störungen, $K(A)=\|A^{-1}\|\|A\|$

relative Kondition: $K_{rel}(f,x)=\left|\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)\right|$

Relativer Fehler: $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}=\frac{K(A)}{1-(K(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|})}\cdot(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|})$

Absoluter Fehler: $\|x\| berechnen, \|\Delta x\| \leq rel.Fehler \cdot \|x\|$

Für $r_A K(A)<1$ gilt: $r_x \leq \frac{K\cdot(r_A+r_b)}{1-(r_A\cdot K)}$ $r_x \leq K(A)\cdot r_b$

Ax = b, A = L + D + R = $\begin{pmatrix} \ddots & & R \\ & D & \\ L & & \ddots \end{pmatrix}$

Gesamtschrittverfahren (Jakobi-Verfahren): $Dx^{(1)}+(L+R)x^{(0)}=b$
Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel-Verfahren): $(D+L)x^{(1)}+Rx^{(0)}=b$
Gleichungen aufstellen, dann mit dem Startvektor den Folgevektor ausrechnen, usw.

Zeilensummenkriterium: $\max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1,k\neq i}^{n} |\frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}|<1$

Spaltensummenkriterium: $\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1,i\neq k}^{n} |\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}|<1$

Sind ZSK oder SSK erfüllt, so konvergieren Einzel- und Gesamtschrittverfahren
Einzelschrittverfahren konvergiert auch bei s.p.d. Matrizen
GSV konvergiert, wenn Spektralradius = $\lambda_{max}[D^{-1}\cdot(-L-R)]<1$ gilt
ESV konvergiert, wenn Spektralradius = $\lambda_{max}[(D+L)^{-1}\cdot(-R)]<1$ gilt

Banach'scher Fixpunktsatz:
1. Intervall abgeschlossen
2. f ist selbstabbildend: f: I → I, $f'(x)\neq 0 \; \forall x\in I$
3. Kontraktion: laut Mittelwertsatz gilt: $Lipschitzkonstante\ L=\max_{x\in I}|f'(x)|<1$

Sind alle 3 Punkte erfüllt, so besitzt I genau einen Fixpunkt und für jeden Startwert x aus I konvergiert die Folge gegen den Fixpunkt.

Definition Fixpunkt: Fixpunkt ist ein Punkt eines Graphen, für den f(x) = x gilt.

Nullstellenproblem → Fixpunktproblem: wandle f(x)=0 um in g(x)=x , g(x) muss ein x enthalten
Fixpunktproblem →Nullstellenproblem: wandle g(x)=x um in f(x)=0 , g(x) muss ein x enthalten

Fixpunktiteration: $x^{k+1}=f(x^k), x_0\in I$ lineare Konvergenz

a-priori: $\|x_n-\bar{x}\|\leq\frac{L^n}{1-L}\|x_1-x_0\|$, also höchstens $n=\left\lceil\frac{\log\frac{\epsilon\cdot(1-L)}{\|x_1-x_0\|}}{\log L}\right\rceil$ Iterationen

a-posteriori: $\|x_n-\bar{x}\|\leq\frac{L}{1-L}\|x_n-x_{n-1}\|$

Newton-Iteration:
quadratische Konvergenz bei einfacher Nullstelle, keine 100%ige Konvergenz

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Für Systeme:

1. Jakobi-Matrix: $(DF)(x,y)=\begin{pmatrix} Term\,1\,nach\,x\,abgeleitet & Term\,1\,nach\,y\,abgeleitet \\ Term\,2\,nach\,x\,abgeleitet & Term\,2\,nach\,y\,abgeleitet \end{pmatrix}$
2. Löse $(DF)(x^{(n)},y^{(n)})\cdot s^{(n)}=-f(x^{(n)},y^{(n)})$, also $s^{(n)}$ bestimmen
3. $x^{(n+1)}=x^{(n)}+s^{(n)}$
4. Zum Schluss (nach der letzten Iteration) noch f(x) mit dem letzten x berechnen

Beim **vereinfachten Newton** ersetze $(DF)(x^{(n)},y^{(n)})$ aus Schritt 2 durch $(DF)(x^{(0)},y^{(0)})$
Das vereinfachte Newton-Verfahren konvergiert linear.

Polynominterpolation:

Ein Polynom n-ten Grades wird eindeutig durch n+1 Stützstellen bestimmt

Interpolationsfehler:
i Stützstellen, bilde die i-te Ableitung von f. Ist f'(x) < 0 (fallend) oder f'(x) > 0 (steigend) für alle x aus I, so ist f streng monoton fallend/steigend. $f^{(i)}(x)$ hat dann sein Maximum am Rand von I.

Nun gilt: $\max_{x\in I}|P(f|x_1,\ldots,x_i)(x)-f(x)|\le\max_{x\in I}|w(x)|\cdot\max_{x\in I}\frac{|f^{(i)}(x)|}{i!}$, $w(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$

Aitken-Neville-Schema:

$P_{i,0}=f(x_i)$, x_i *sind durchlaufend. Umbenennen, wenn nicht.*

$$P_{i,k}=P_{i,k-1}+\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}}\cdot(P_{i-1,k-1}-P_{i,k-1})$$

Lagrange-Schema:

$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_i\cdot l_i(x)$ mit $l_i(x)=\prod_{k=0,k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}$

Newton-Schema:

$P(f|x_0\ldots x_n)=f_1+(x-x_0)\cdot f_1'+(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot f_1''+\ldots$ mit

$$\begin{array}{c||llll}
x_1 & f_1 & & & \\
x_2 & f_2 & \ldots\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=f_1' & & \\
x_3 & f_3 & \ldots\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}=f_2' & \ldots\frac{f_2'-f_1'}{x_3-x_1}=f_1'' & \\
x_4 & f_4 & \ldots\frac{f_4-f_3}{x_4-x_3}=f_3' & \ldots\frac{f_3'-f_2'}{x_4-x_2}=f_2'' & \ldots\frac{f_2''-f_1''}{x_4-x_1}=f_1'''
\end{array}$$

lineares Ausgleichsproblem:

1. Matrix A aufstellen:
   - 1. Spalte α-Term, abhängig von t_i,ohne α
   - 2. Spalte β-Term, abhängig von t_i, ohne β
2. $b=\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

QR-Zerlegung:

Householder: Aufwand: $O(\frac{2}{3}n^3)$

1. $v_1=a_1+sgn(a_{11})\cdot\|a_1\|_2\cdot e_1$ a_1 bzw e_1 bezeichnet die erste Spalte der Matrix A bzw I
2. $n_1=\|v_1\|_2^2$
3. $A^1=A-\frac{2}{n_1}\cdot v_1\cdot(v_1^T\cdot A)$
4. $b^1=b-\frac{2}{n_1}\cdot v_1\cdot(v_1^T\cdot b)$
5. von A^1 erste Zeile und Spalte streichen, von b^1 erste Zeile streichen, weiter mit 1.
6. $R=\begin{pmatrix} A^1 & \cdots & \cdots \\ 0 & A^2 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} Q^T b=\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$
7. Berechne x mit $\|Rx-Q^T b\|$
8. Residuum = Approximationsfehler ist die Norm dessen, was bei Q^Tb überflüssig ist, da in den entsprechenden Zeilen in R nur Nullen stehen

Givens: Aufwand: $O(\frac{4}{3}n^3)$

Normalengleichungen:

$\tilde{A}x=\tilde{b}$ mit $\tilde{A}=A^T A$ und $\tilde{b}=A^T b$

Achtung: $K_2(\tilde{A})=K_2(A)^2$ die Kondition quadriert sich

AWP:

maximales Existenzintervall: $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *offen*, $f: D\to\mathbb{R}^n$ *stetig und erfüllt lokale Lipschitzbed.*

DGL n-ter Ordnung in DGL 1. Ordnung:

$$z(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, z'(x)=\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \\ y^{(n)}(x)=\ldots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z(0)=[y(0),y'(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)]$$

Trennung der Variablen:

DGL der Form $y'(x)=f(x)\cdot g(y)$

1. $\frac{dy(x)}{dx}=f(x)\cdot g(y)\Leftrightarrow\int\frac{dx}{f(x)}=\int g(y)\,dy$
2. Auf die Form y = ... bringen
3. Anfangsbedingung einsetzen und c berechnen
4. Existenzintervall angeben

Mit Substitution:

z.B. $z=(\frac{y}{x})$:

1. DGL umformen, bis alle Variablen durch z ersetzt werden können. AW neu berechnen!
2. $z'=\frac{1}{x}(f(z)-z)$. Damit 1.-3. von oben berechnen.
3. Zurücksubstituieren und dann auf y=... bringen. Danach 4. von oben

DGL-Systeme:

1. EW von A berechnen
2. EV von A berechnen. Bei k-fachen EW v_{i+1} bis v_{i+k} so ausrechnen:
   $(A-\lambda I)v_{i+j}=v_{i+j-1}\,mit\;j=1,2,\dots,k$
3. Fundamentalsystem:
   einfache EW: $y_1(t)=v_1\cdot e^{\lambda_1 t},\dots,y_i(t)=v_i\cdot e^{\lambda_i t}$
   k-fache EW:

$$y_{i+1}(t)=v_{i+1}\cdot e^{\lambda_{i+1}t},\,y_{i+2}(t)=(v_{i+2}+t\cdot v_{i+1})\cdot e^{\lambda_{i+2}t},\,y_{i+3}(t)=(v_{i+3}+t\cdot v_{i+2}+\frac{t^2}{2}\cdot v_{i+1})\cdot e^{\lambda_{i+3}t},\dots$$

4. Wronski-Matrix: $W(t)=\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix}$
5. Homogene Lösung: $y_H(t)=W(t)\cdot c\;mit\;W(t_0)\cdot c=y_0$
6. Partikuläre Lösung: $y_P(t)=W(t)\cdot c(t)\,mit\,W(t)\cdot c'(t)=F(t)\rightarrow c'(t),\,c(t)=\int_0^t c'(u)\,du$
7. Gesamtlösung: $y(t)=y_H+y_P$

Näherungsverfahren:

implizite Verfahren: Um y_{k+1} zu berechnen wird y_{k+1} benötigt, in jedem Schritt ein GLS lösen

gegeben: y' = ..., y(0) = ..., h = ...

expliziter Euler: $y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k,y_k)$ Konvergenzordnung 1

impliziter Euler: $y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_{k+1},y_{k+1})$ Konvergenzordnung 1

verbesserter Euler:
$$y_{k+1}=y_k+h\cdot K_2$$
$$K_1=f(x_k,y_k)$$
$$K_2=f(x_k+\frac{1}{2}h,\,y_k+\frac{1}{2}h\cdot K_1)$$
Konvergenzordnung 2

Runge-Kutta:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4)$$
$$K_1 = f(x_k, y_k)$$
$$K_2 = f(x_k + \frac{1}{2} h, y_k + \frac{1}{2} h \cdot K_1)$$
$$K_3 = f(x_k + \frac{1}{2} h, y_k + \frac{1}{2} h \cdot K_2)$$
$$K_4 = f(x_k + h, y_k + h \cdot K_3)$$

Konvergenzordnung 4

Sonstiges:

$\log_b(u\cdot v)=\log_b(u)+\log_b(v)\, mit\, u,v,b\in\mathbb{R}^+, b\neq 1 \qquad \frac{\log a}{\log b}=c\Leftrightarrow b^c=a \qquad \log_b a=c\Leftrightarrow b^c=a$

$\log_b(c^n)=n\cdot\log_b c \qquad \log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a} \qquad \log_b(\frac{u}{v})=\log_b(u)-\log_b(v)\, mit\, u,v,b\in\mathbb{R}^+, b\neq 1$

$b^{\log_b c}=c \qquad \log_b c=\frac{1}{\log_c b} \qquad \ln(0)=1 \qquad det(A)=det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix})=\frac{1}{det(A)}\cdot\begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}, dann\, ist\; f'(x)=\frac{u'(x)*v(x)-u(x)*v'(x)}{v(x)^2}$

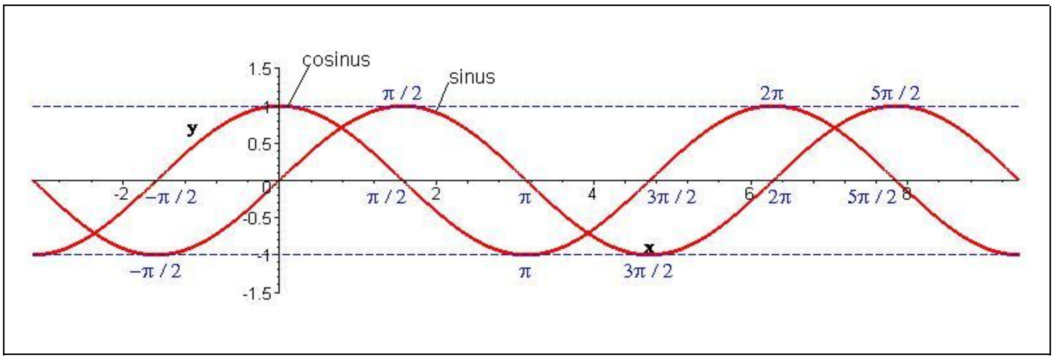
$f(x)=g(h(x)), dann\, ist\; f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$

$f(x)$	$F(x)$
0	C
$k\ (k\in\mathbb{R})$	$kx+C$
x	$\frac{1}{2}x^2+C$
$2x$	x^2
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$3x^2$	x^3
$qx^{q-1}\ (q\neq 0)$	x^q
x^q	$\begin{cases}\frac{x^{q+1}}{q+1} & \text{wenn } q\neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert & \text{wenn } q=-1\end{cases}$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$a^x\ln a\ (a>0, a\neq 1)$	a^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$e^{x\ln\lvert x\rvert}(\ln\lvert x\rvert+1)$	$\lvert x\rvert^x$ entspricht $e^{x\ln\lvert x\rvert}$ $(x\neq 0)$
$\frac{-2}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\ln x$	$x\ln x-x$
$\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$	$\log_a x$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}(x\ln x-x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\cos x$
$\cot x$	$\ln\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$\cot x$
$\arcsin x$	$x\ \arcsin x+\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x\arccos\ x-\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

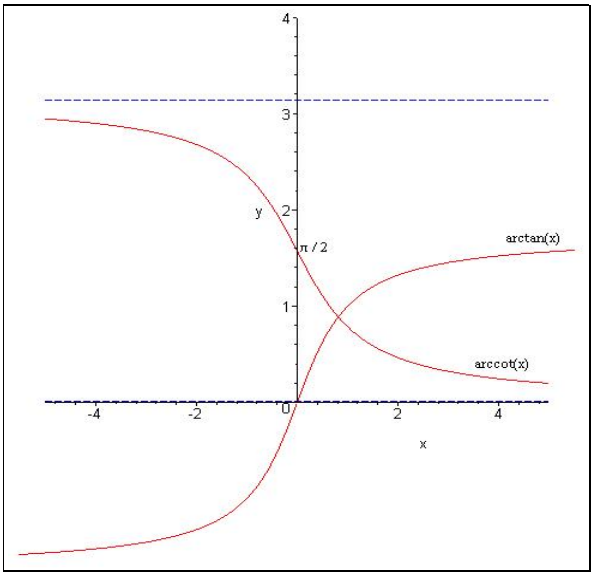
$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$
$\coth x$	$\ln\sinh x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$	$\tanh x$
$\frac{-1}{\sinh^2 x}=1-\coth^2 x$	$\coth x$
$\operatorname{arsinh} x$	$x\ \operatorname{arsinh} x-\sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{arcosh} x$	$x\ \operatorname{arcosh} x-\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x$	$x\ \operatorname{artanh} x+\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$
$\operatorname{arcoth} x$	$x\ \operatorname{arcoth} x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x>1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert<1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert>1$	$\operatorname{arcoth} x$
$\sin^2 x$	$\frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$
$\cos^2 x$	$\frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}$
e^{-x^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \mathrm{Erf}\ x$
e^{-ax^2+bx+c}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\ e^{\frac{b^2}{4a}+c}\ \mathrm{Erf}\left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x)$

Eine Matrix A ist orthogonal, wenn gilt: $A^T A = AA^T = I \Leftrightarrow A = A^{-1}$
Eine Matrix A ist regulär, wenn gilt: $det(A) \neq 0$

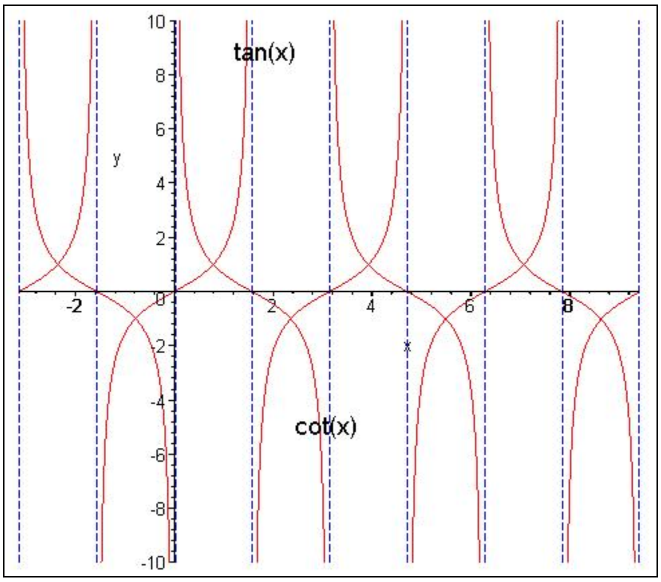
	$0 \cdot \Pi$	$\frac{1}{6} \cdot \Pi$	$\frac{1}{4} \cdot \Pi$	$\frac{1}{3} \cdot \Pi$	$\frac{1}{2} \cdot \Pi$
sinus	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
cosinus	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$



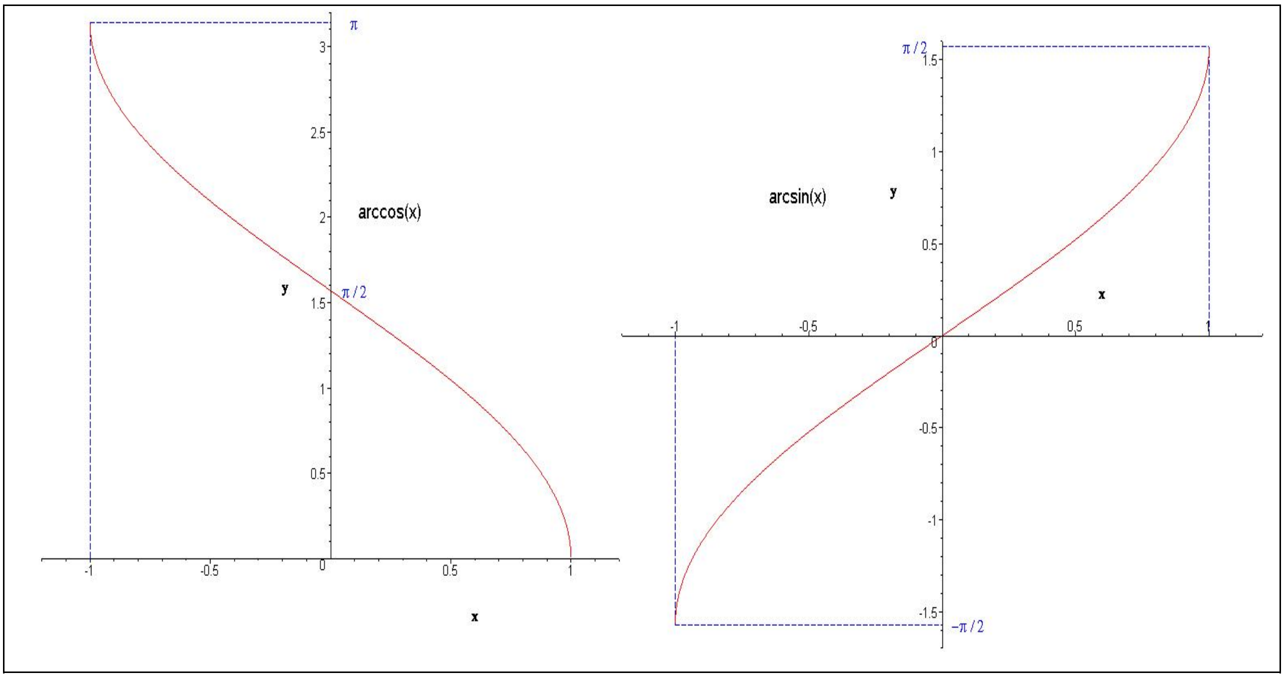
sinus und cosinus



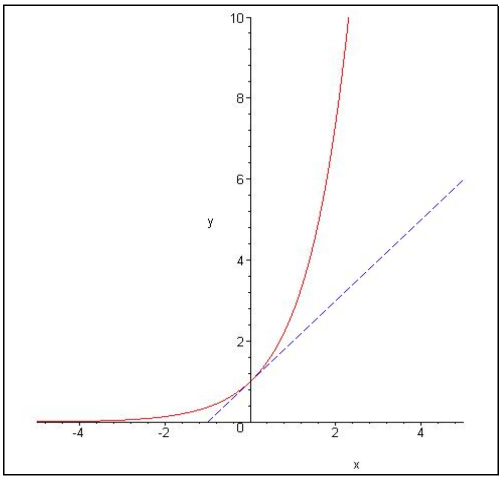
arctan und arccot

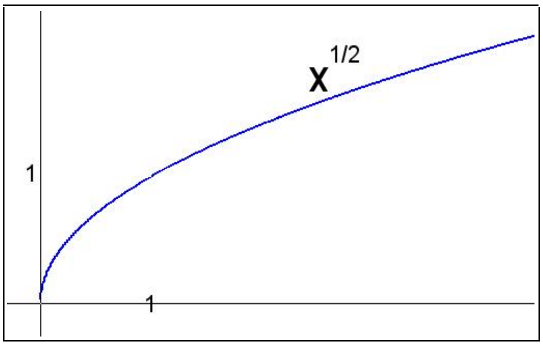


tan und cot



arcsin und arccos





$\sqrt{x} - Funktion$

e-Funktion. Die ln-Funktion ist die Spiegelung an der Hauptdiagonalen

e = 2.71828183
Π = 3.14159265

$e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$ $\arctan(b) = a \Leftrightarrow \tan(a) = b$ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$